La physique de l’espace

De l’observation à la théorie, et vice-versa· · ·

Jérôme Perez

Ecole d'été de physique

La gravitation est une propriété de l'espace

La dynamique newtonienne.

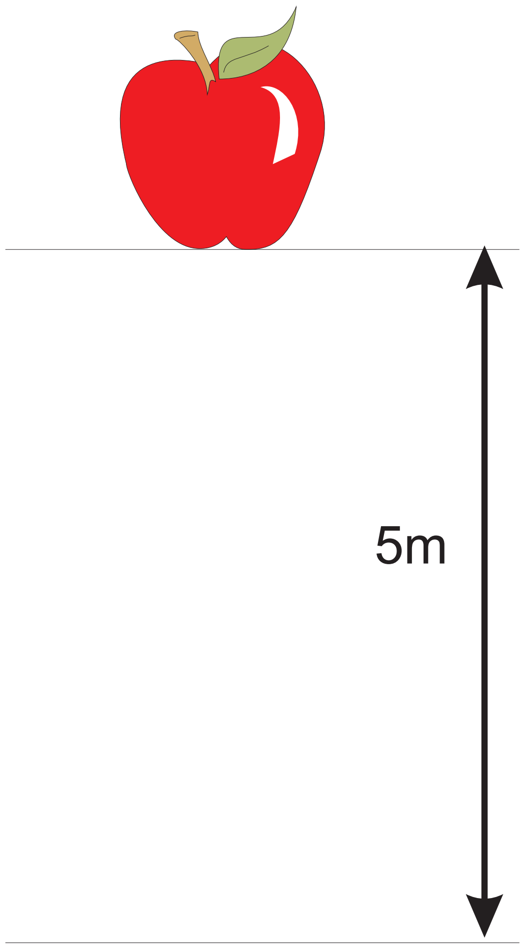
La force est la quantité physique qui mesure

la variation de la vitesse par unité de masse.

La vitesse est vectorielle, il en est donc de même de la force.

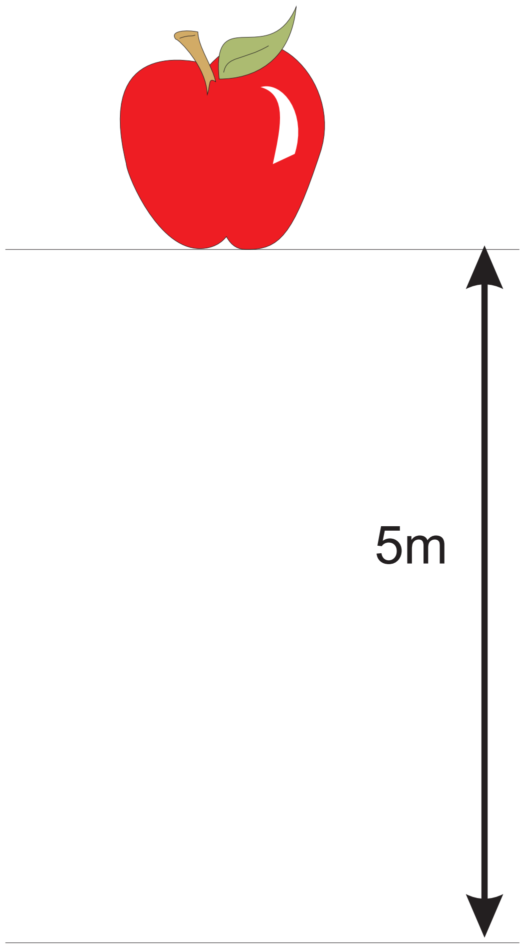
Comment en déduit-on la gravitation ?

Chute d’une pomme



Temps de chute ?

Chute d’une pomme



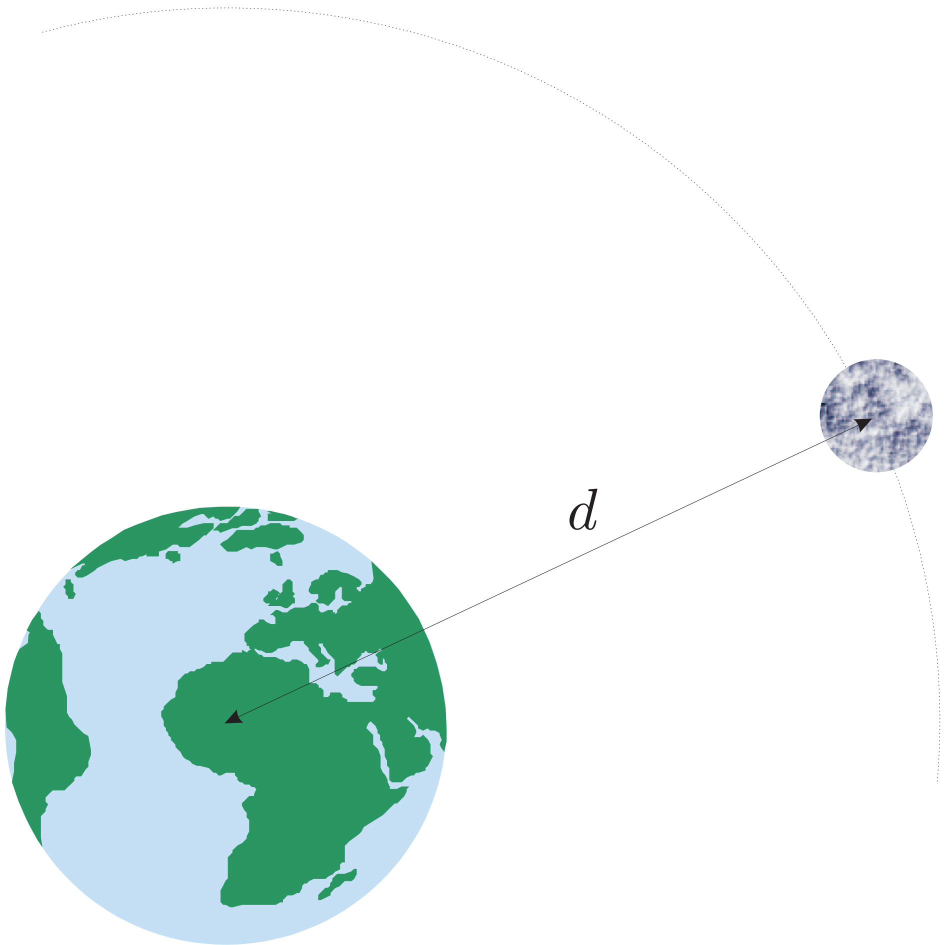
Temps de chute ?

1 seconde

Faite l’expérience vous-même !

Chute de la Lune

Chute de la Lune



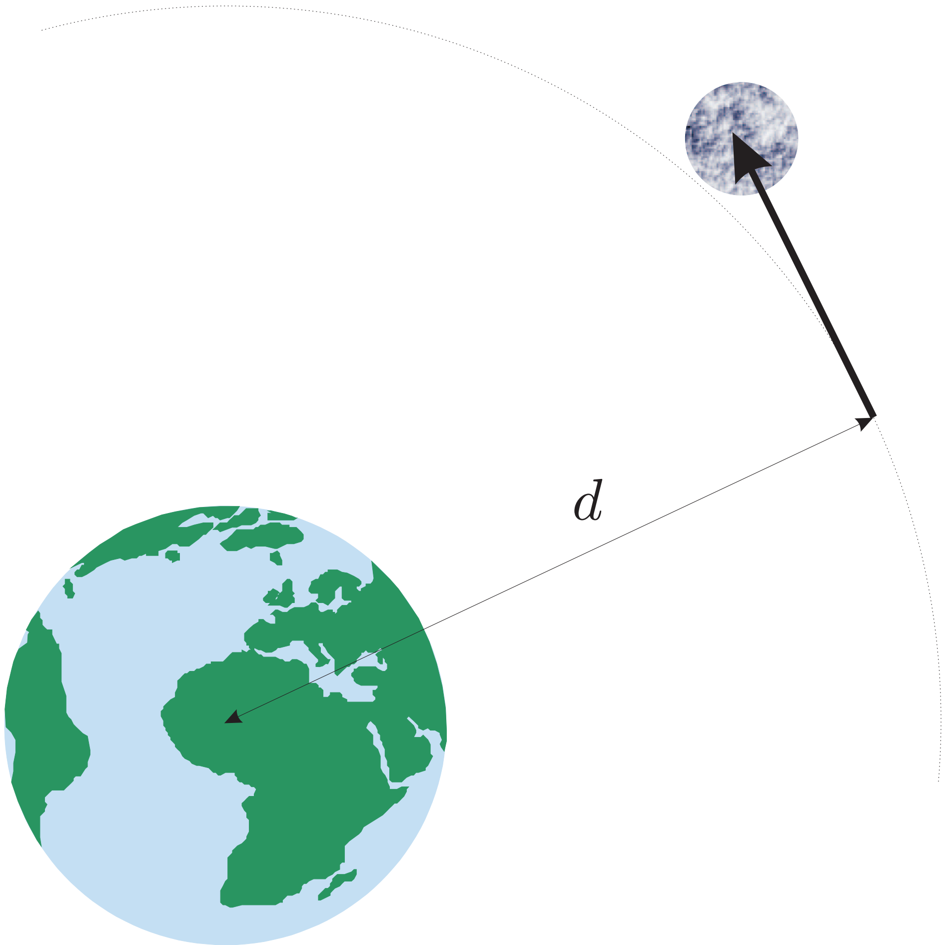
T ≈ 27,371 jours
C ≈ 2π x 384 000 km

Soit

T ≈ 2 364 854 s
C ≈ 2 412 672 km

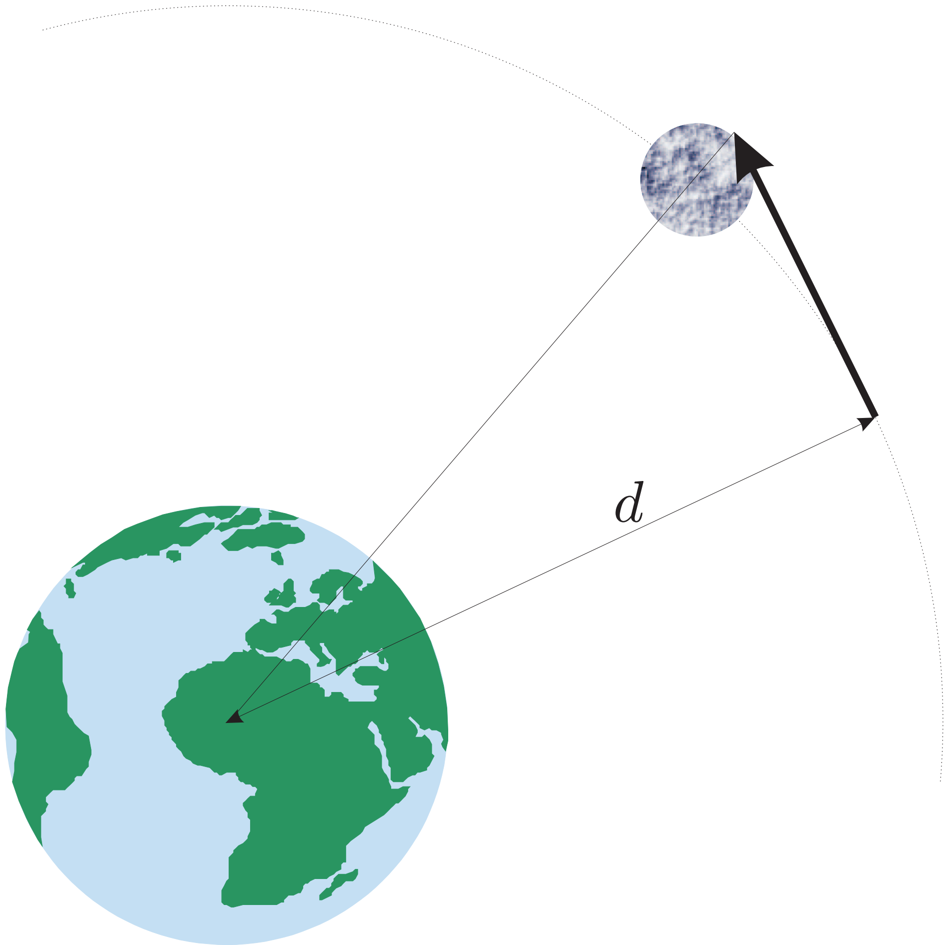
Vitesse ≈ 1 km/s

Chute de la Lune



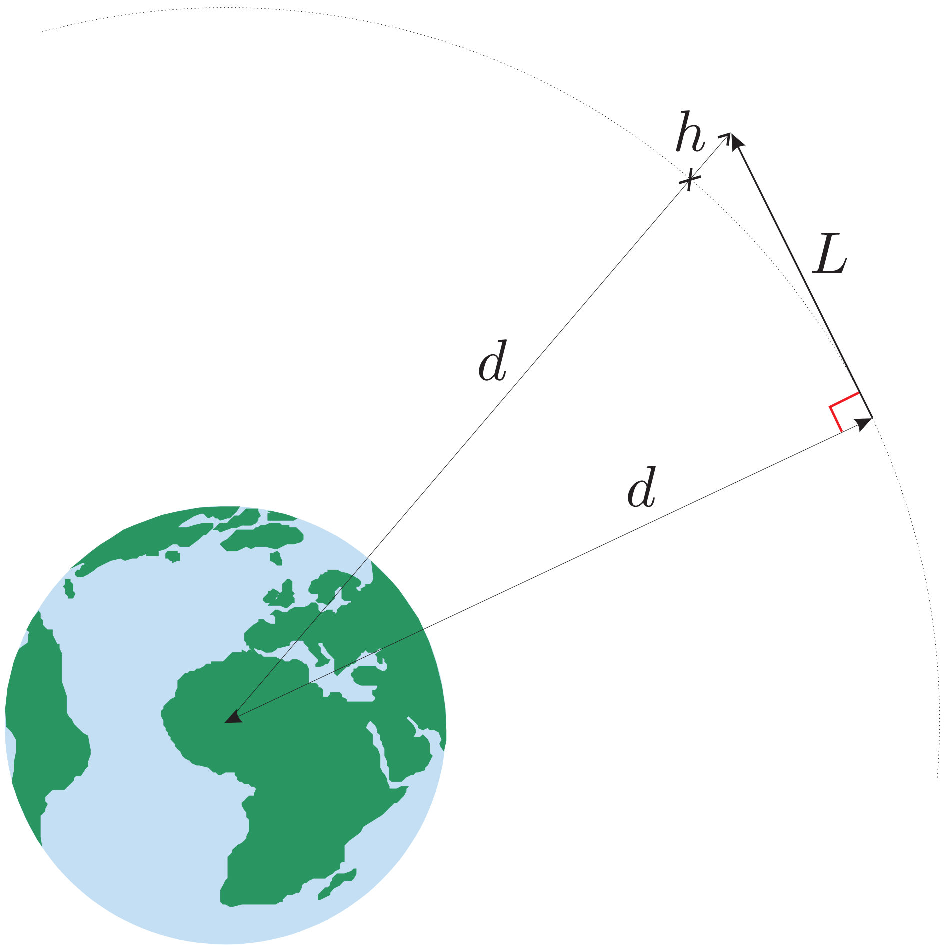
Si la Lune n'était pas attirée par
la Terre elle irait tout droit !

Chute de la Lune



En fait elle tombe un peu ...

Chute de la Lune



Théorème de Pythagore

$$d^2 + L^2 = (d+h)^2$$

Soit $h \approx L^2/2d$

pour 1 seconde, $L =$1km
$\Rightarrow\ h =$1,35 mm

En une seconde ...

Ecole d'été
de physique

En une seconde ...

- La pomme tombe de 5 m,
  elle est située à 6380 km du centre de la Terre ...
- La Lune tombe de 1,35 mm,
  elle est située à 380 000 km, du centre de la Terre ...

En une seconde ...

La pomme tombe de 5 m,
elle est située à 6380 km du centre de la Terre ...

La Lune tombe de 1,35 mm,
elle est située à 380 000 km, du centre de la Terre ...

$$\boxed{\frac{D_{\text{Lune}}}{D_{\text{Pomme}}} = \frac{380\,000}{6\,380} \approx 60}$$

et

$$\boxed{\frac{h_{\text{Lune}}}{h_{\text{Pomme}}} = \frac{5}{0,00135} \approx 60 \times 60}$$

Ecole d'été de physique

En une seconde ...

La pomme tombe de 5 m,
elle est située à 6380 km du centre de la Terre ...

La Lune tombe de 1,35 mm,
elle est située à 380 000 km, du centre de la Terre ...

$$\boxed{\frac{D_{\text{Lune}}}{D_{\text{Pomme}}} = \frac{380\,000}{6\,380} \approx 60}$$ et $$\boxed{\frac{h_{\text{Lune}}}{h_{\text{Pomme}}} = \frac{5}{0,00135} \approx 60 \times 60}$$

La Lune est 60 fois plus loin que la pomme, elle est 60×60 fois moins attirée !

La gravitation est inversement proportionnelle au carré de la distance

En une seconde ...

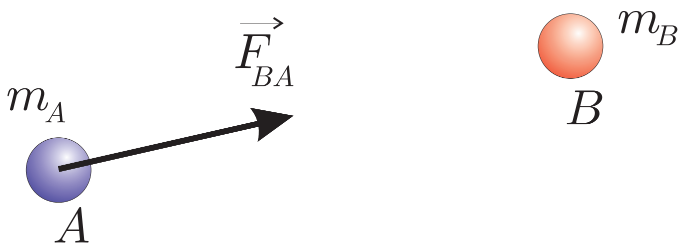
La pomme tombe de 5 m,
elle est située à 6380 km du centre de la Terre ...

La Lune tombe de 1,35 mm,
elle est située à 380 000 km, du centre de la Terre ...

$$\boxed{\frac{D_{\text{Lune}}}{D_{\text{Pomme}}} = \frac{380\,000}{6\,380} \approx 60} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{h_{\text{Lune}}}{h_{\text{Pomme}}} = \frac{5}{0,00135} \approx 60 \times 60}$$

La Lune est 60 fois plus loin que la pomme, elle est 60×60 fois moins attirée !

La gravitation est inversement proportionnelle au carré de la distance



En une seconde ...

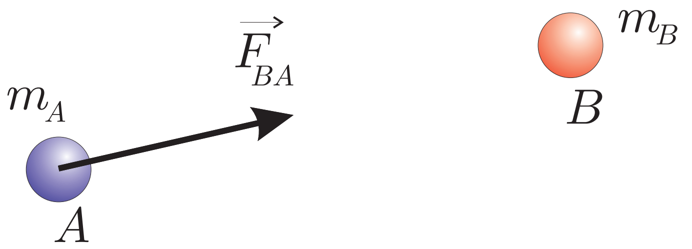
La pomme tombe de 5 m,
elle est située à 6380 km du centre de la Terre ...

La Lune tombe de 1,35 mm,
elle est située à 380 000 km, du centre de la Terre ...

$$\boxed{\frac{D_{\text{Lune}}}{D_{\text{Pomme}}} = \frac{380\,000}{6\,380} \approx 60} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{h_{\text{Lune}}}{h_{\text{Pomme}}} = \frac{5}{0,00135} \approx 60 \times 60}$$

La Lune est 60 fois plus loin que la pomme, elle est 60×60 fois moins attirée !

La gravitation est inversement proportionnelle au carré de la distance



Force de gravitation : attractive

$$\overrightarrow{F_{BA}} \propto -\frac{\overrightarrow{BA}}{\left\|\overrightarrow{BA}\right\|^3}$$

En une seconde ...

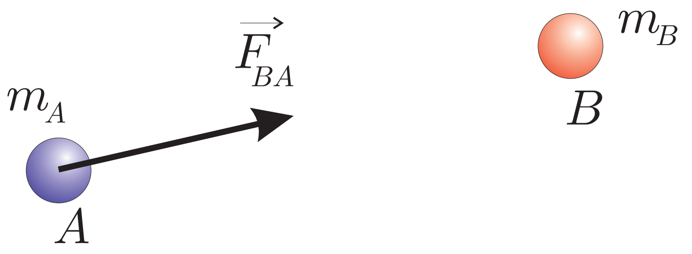
La pomme tombe de 5 m,
elle est située à 6380 km du centre de la Terre ...

La Lune tombe de 1,35 mm,
elle est située à 380 000 km, du centre de la Terre ...

$$\boxed{\frac{D_{\text{Lune}}}{D_{\text{Pomme}}} = \frac{380\ 000}{6\ 380} \approx 60} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{h_{\text{Lune}}}{h_{\text{Pomme}}} = \frac{5}{0,00135} \approx 60 \times 60}$$

La Lune est 60 fois plus loin que la pomme, elle est 60×60 fois moins attirée !

La gravitation est inversement proportionnelle au carré de la distance



Force de gravitation : dépend de m_A et m_B

$$\overrightarrow{F_{BA}} \propto -m_A m_B \frac{\overrightarrow{BA}}{\left\|\overrightarrow{BA}\right\|^3}$$

En une seconde ...

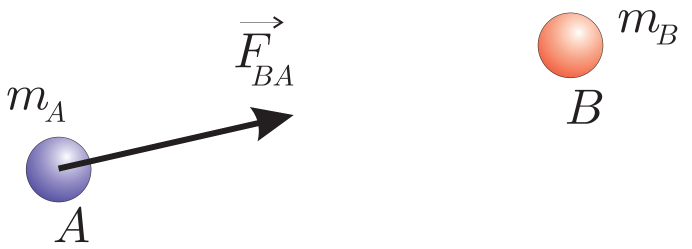
La pomme tombe de 5 m,
elle est située à 6380 km du centre de la Terre ...

La Lune tombe de 1,35 mm,
elle est située à 380 000 km, du centre de la Terre ...

$$\boxed{\frac{D_{\text{Lune}}}{D_{\text{Pomme}}} = \frac{380\;000}{6\;380} \approx 60} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{h_{\text{Lune}}}{h_{\text{Pomme}}} = \frac{5}{0,00135} \approx 60 \times 60}$$

La Lune est 60 fois plus loin que la pomme, elle est 60×60 fois moins attirée !

La gravitation est inversement proportionnelle au carré de la distance



Force de gravitation : est une force !

$$\left.\begin{array}{c}\overrightarrow{F_{BA}}\\ {[\mathtt{M}]\,.\,[\mathtt{L}]\,.\,[\mathtt{T}]^{-2}}\end{array}\right\} \propto \left\{\begin{array}{c}-m_A m_B\,\overrightarrow{BA}/\left\|\overrightarrow{BA}\right\|^3\\ {[\mathtt{M}]^2\,.\,[\mathtt{L}]^{-2}}\end{array}\right.$$

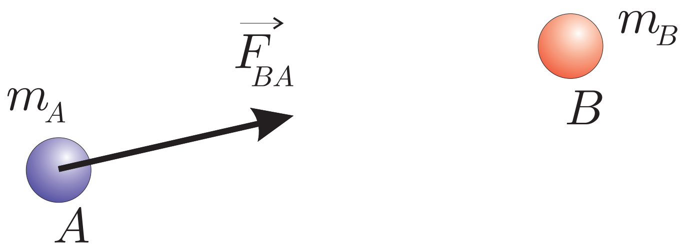
En une seconde ...

- La pomme tombe de 5 m,
  elle est située à 6380 km du centre de la Terre ...
- La Lune tombe de 1,35 mm,
  elle est située à 380 000 km, du centre de la Terre ...

$$\boxed{\frac{D_{\text{Lune}}}{D_{\text{Pomme}}} = \frac{380\ 000}{6\ 380} \approx 60} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{h_{\text{Lune}}}{h_{\text{Pomme}}} = \frac{5}{0,00135} \approx 60 \times 60}$$

La Lune est 60 fois plus loin que la pomme, elle est 60×60 fois moins attirée !

La gravitation est inversement proportionnelle au carré de la distance



Constante de Newton

$$G \;=\; 6,64 \times 10^{-11}\ \mathrm{m}^3.\mathrm{kg}^{-1}.\mathrm{s}^{-2}$$

En une seconde ...

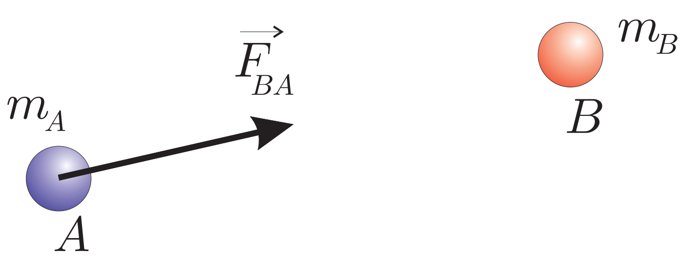
La pomme tombe de 5 m,
elle est située à 6380 km du centre de la Terre ...

La Lune tombe de 1,35 mm,
elle est située à 380 000 km, du centre de la Terre ...

$$\boxed{\frac{D_{\text{Lune}}}{D_{\text{Pomme}}} = \frac{380\,000}{6\,380} \approx 60} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{h_{\text{Lune}}}{h_{\text{Pomme}}} = \frac{5}{0,00135} \approx 60 \times 60}$$

La Lune est 60 fois plus loin que la pomme, elle est 60×60 fois moins attirée !

La gravitation est inversement proportionnelle au carré de la distance

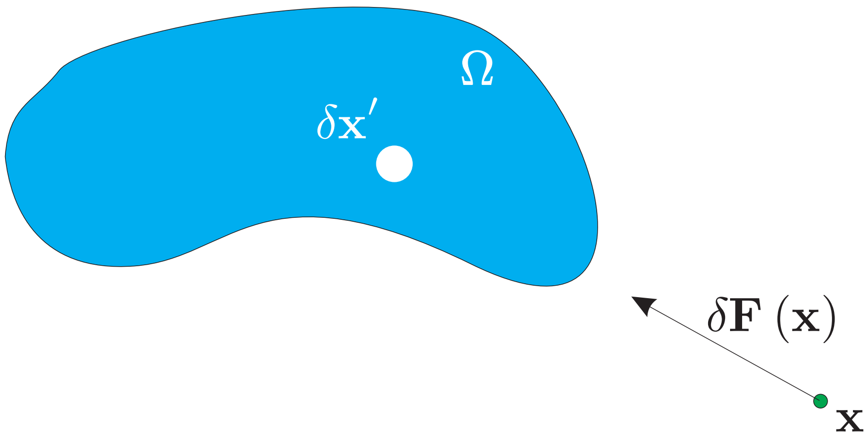


Force de gravitation

$$\overrightarrow{F_{BA}} = -G m_A m_B \frac{\overrightarrow{BA}}{\left\|\overrightarrow{BA}\right\|^3}$$

Nature de la gravitation

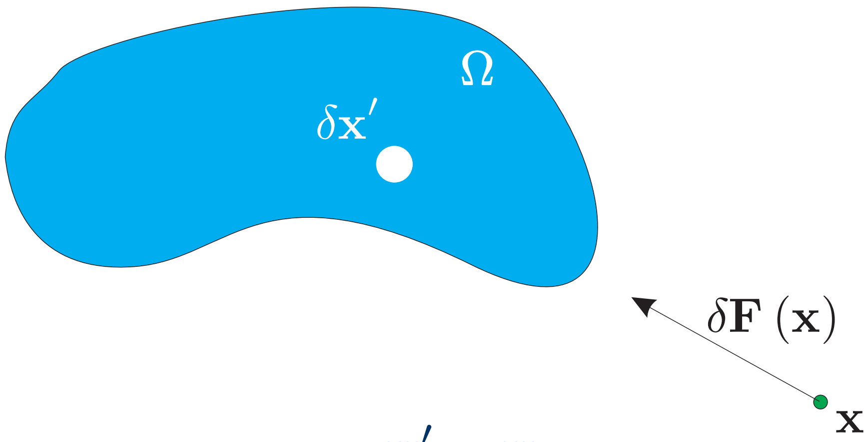
Nature de la gravitation



Densité de masse

$$\rho = \begin{cases} \rho(\mathbf{x}') & \text{si} \quad \mathbf{x}' \in \Omega \\ 0 & \text{si} \quad \mathbf{x}' \notin \Omega \end{cases}$$

Nature de la gravitation

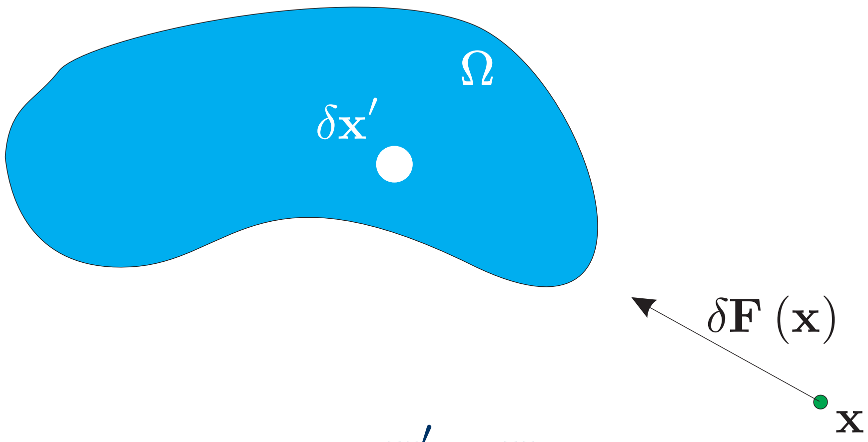


Densité de masse

$$\rho = \begin{cases} \rho(\mathbf{x}') & \text{si} \quad \mathbf{x}' \in \Omega \\ 0 & \text{si} \quad \mathbf{x}' \notin \Omega \end{cases}$$

$$\delta\mathbf{F} = -G\,\frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3}\,\rho(\mathbf{x}')\,\delta^3\mathbf{x}' \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{F} = -G\int \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3}\,\rho(\mathbf{x}')\,d^3\mathbf{x}'$$

Nature de la gravitation



Densité de masse

$$\rho = \begin{cases} \rho\left(\mathbf{x}'\right) & \text{si} \quad \mathbf{x}' \in \Omega \\ 0 & \text{si} \quad \mathbf{x}' \notin \Omega \end{cases}$$

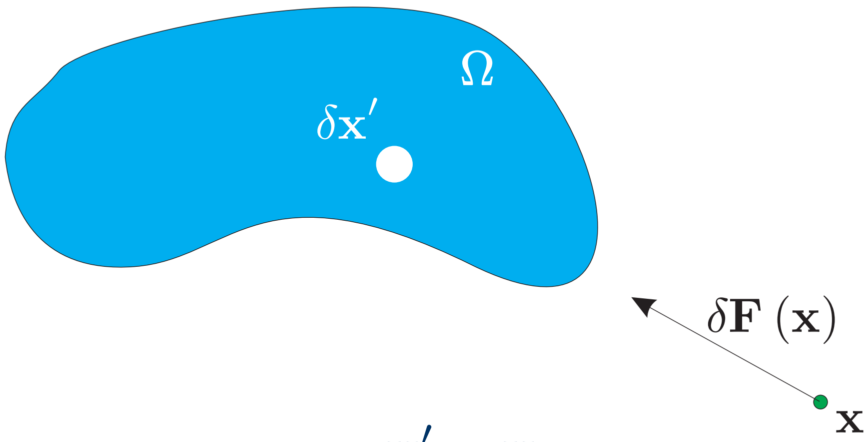
$$\delta\mathbf{F} = -G\,\frac{\mathbf{x}'-\mathbf{x}}{\left|\mathbf{x}'-\mathbf{x}\right|^3}\,\rho\left(\mathbf{x}'\right)\,\delta^3\mathbf{x}' \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{F} = -G\int\frac{\mathbf{x}'-\mathbf{x}}{\left|\mathbf{x}'-\mathbf{x}\right|^3}\,\rho\left(\mathbf{x}'\right)\,d^3\mathbf{x}'$$

Potentiel gravitationnel

$$\psi\left(\mathbf{x}\right) = -G\int\frac{\rho\left(\mathbf{x}'\right)}{\left|\mathbf{x}'-\mathbf{x}\right|}\,d^3\mathbf{x}' \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{F} = -\nabla\psi$$

$$\boxed{\psi\left(\mathbf{x}\right) = -G\rho\left(\mathbf{x}\right) * \frac{1}{\left|\mathbf{x}\right|} = S_3 G\rho\left(\mathbf{x}\right) * g_{\Delta_3}\left(\mathbf{x}\right)}$$

Nature de la gravitation



Densité de masse

$$\rho = \begin{cases} \rho(\mathbf{x}') & \text{si} \quad \mathbf{x}' \in \Omega \\ 0 & \text{si} \quad \mathbf{x}' \notin \Omega \end{cases}$$

$$\delta \mathbf{F} = -G \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \rho(\mathbf{x}') \; \delta^3 \mathbf{x}' \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{F} = -G \int \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \rho(\mathbf{x}') \; d^3 \mathbf{x}'$$

Potentiel gravitationnel

$$\psi(\mathbf{x}) = -G \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|} \; d^3 \mathbf{x}' \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{F} = -\nabla \psi$$

$$\boxed{\psi(\mathbf{x}) = -G\rho(\mathbf{x}) * \frac{1}{|\mathbf{x}|} = S_3 G \rho(\mathbf{x}) * g_{\Delta_3}(\mathbf{x})}$$

La gravitation est une propriété de l'espace ...

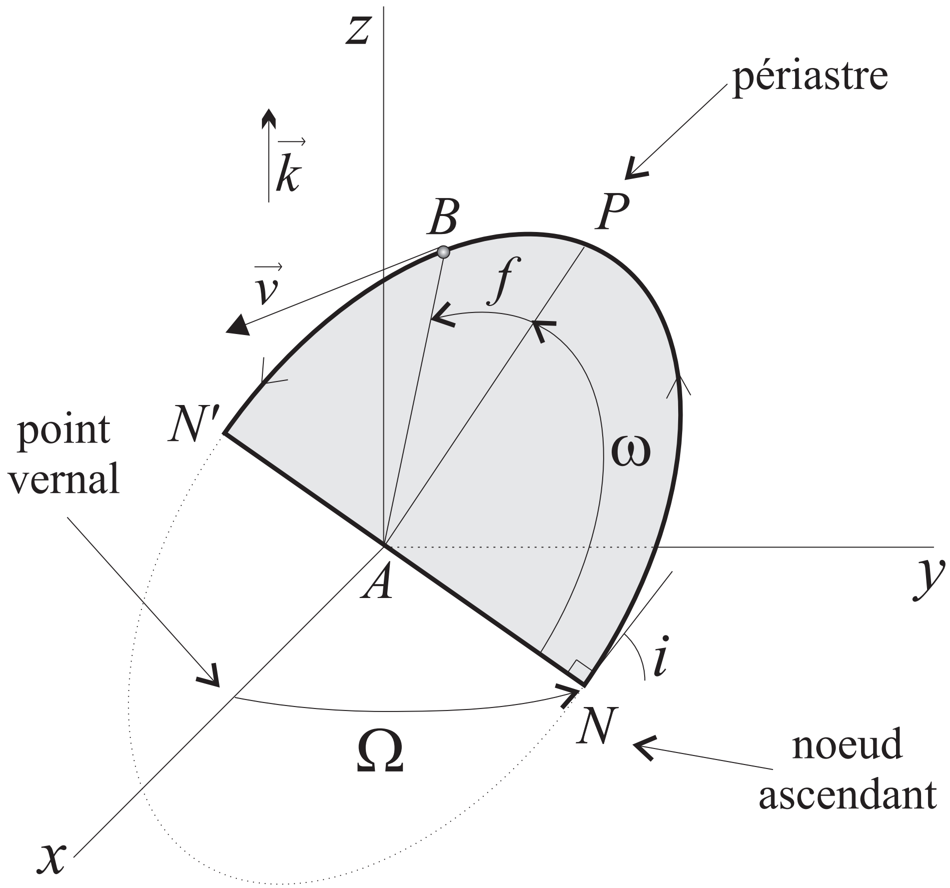
2 corps : A et B

$$C = \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 \frac{df}{dt} = \text{cste}$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \frac{p}{1 + e\cos f}$$

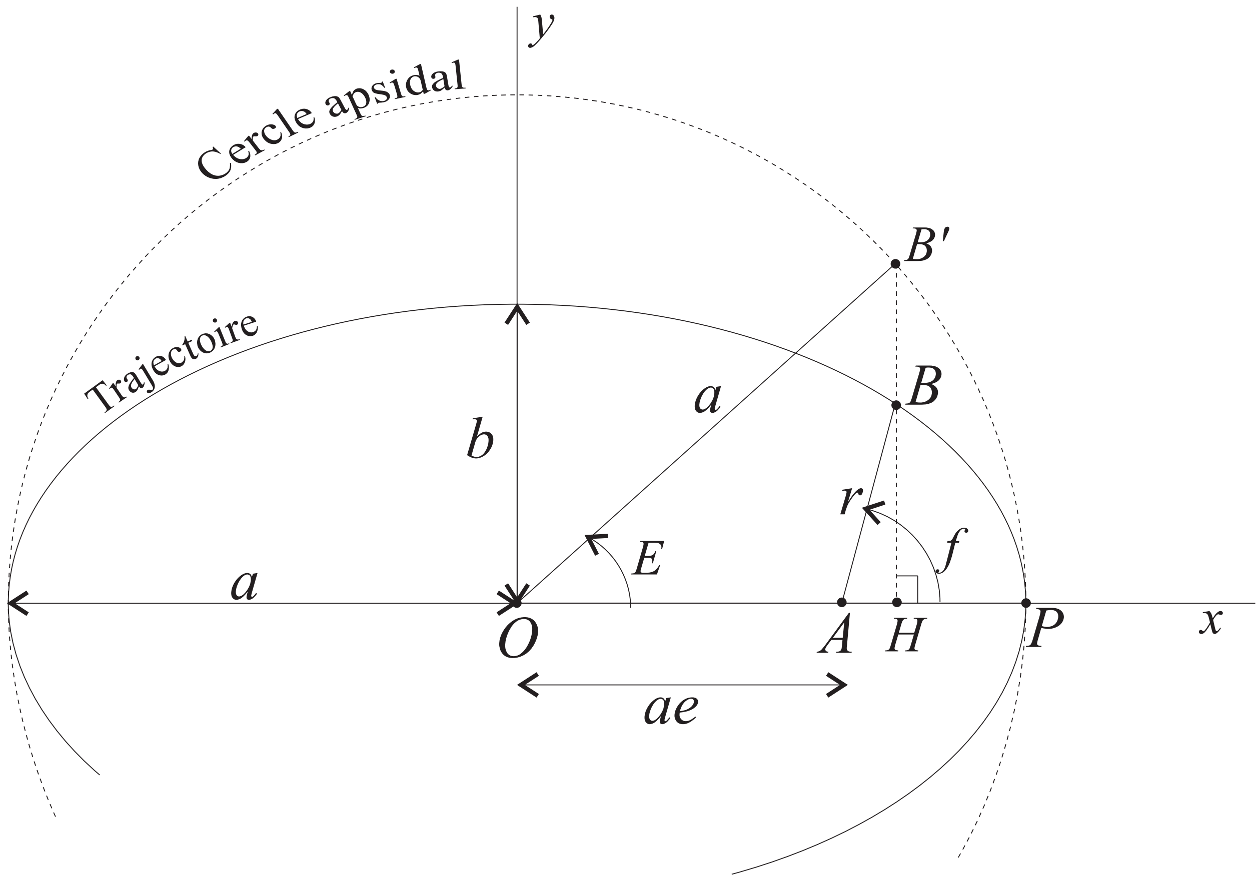
$$p = \sqrt{CG(m_A + m_B)} = \frac{a}{1 - e^2}$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{2C^2\xi}{G^2(m_A + m_B)^2}}$$



- Inclinaison du plan orbital : i : comptée de 0 à $180°$. Si $0° < i \leq 90°$: mouvement direct, si $90° < i \leq 180°$: mouvement rétrograde.
- Longitude du noeud ascendant : Ω : angle (Ax, AN) entre les directions du point vernal et du noeud ascendant mesuré dans le plan A_{xy}
- Argument du périastre : ω : angle (AN, AP) entre la ligne des noeuds et la direction du périastre mesuré dans le plan de l'orbite

L'équation de Kepler



$$\tan\left(\frac{f}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\left(\frac{E}{2}\right)$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = a(1 - e\cos E)$$

$$\boxed{E - e\sin E = \frac{2\pi}{T}(t-\tau)}$$

L'art de perturber

Le problème non perturbé : $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\mu \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$ fait apparaître 6 constantes

$$\vec{k} = [a, e, i, \Omega, \omega, \tau]^\top, \vec{r} = \vec{r}\left(\vec{k}\right)$$

Si le problème pertubé s'écrit $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\mu \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} + \nabla_{\vec{r}}\, R,$

Lagrange montre que $\vec{k} \rightarrow \vec{k}\,(t)$ avec

$$\boxed{A \frac{d\vec{k}}{dt} = \nabla_{\vec{k}}\, R}$$

avec $\left\{ \begin{array}{ll} A^\top = -A & \det(A) \neq 0 \\ A_{ij} = \langle k_i, k_j \rangle & \langle\ ,\ \rangle \\ \frac{\partial A_{ij}}{\partial t} = 0 & \end{array} \right.$: Algèbre de Lie

$\rightarrow$ Équations planétaires de Lagrange ...

Variation des constantes

$$\vec{r} = {}^{\top}[x, y, z], \quad \vec{F}_{\text{pert}} = {}^{\top}[X, Y, Z]$$

$$\vec{k} = {}^{\top}[a, e, i, \omega, \Omega, \tau] \;\rightarrow\; \vec{k} = {}^{\top}[\cdots, k_j(t), \cdots] \;\; j = 1, \cdots, 6$$

$$\ddot{x} = -\mu\frac{x}{r^3} + X \qquad\qquad x = x(\{k_j(t)\}; t)$$

$$\ddot{y} = -\mu\frac{y}{r^3} + Y \quad \text{avec} \quad y = y(\{k_j(t)\}; t)$$

$$\ddot{z} = -\mu\frac{z}{r^3} + Z \qquad\qquad z = z(\{k_j(t)\}; t)$$

soit

$$\dot{x} := \frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial t} + \sum_{j=1}^{6}\frac{\partial x}{\partial k_j}\dot{k}_j$$

$$+ id \quad y, z$$

Jauge de Lagrange

3 inconnues $x\,(t)\,,y\,(t)$ et $z\,(t) \Longrightarrow$ 6 $k_j\,(t)$

$\Downarrow$

3 contraintes indépendantes

$$\sum_{j=1}^{6}\frac{\partial x}{\partial k_j}\dot{k}_j=\sum_{j=1}^{6}\frac{\partial y}{\partial k_j}\dot{k}_j=\sum_{j=1}^{6}\frac{\partial z}{\partial k_j}\dot{k}_j=0$$

il reste donc $\dot{x}=\dfrac{\partial x}{\partial t},\ \dot{y}:=\dfrac{\partial y}{\partial t},\ \dot{z}=\dfrac{\partial z}{\partial t}$. Le mouvement s'écrit (pour x)

$$\ddot{x}=-\mu\frac{x}{r^3}+X \quad\Longrightarrow\quad \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}+\sum_{j=1}^{6}\dot{k}_j\frac{\partial \dot{x}}{\partial k_j}=-\mu\frac{x}{r^3}+X$$

on identifie donc

$$\sum_{j=1}^{6}\dot{k}_j\frac{\partial \dot{x}}{\partial k_j}=X \quad (\text{id. } y,z)$$

Crochets de Lagrange

Système à résoudre

$$
\left.\begin{array}{l}
\displaystyle\sum_{j=1}^{6} \dot{k}_j \frac{\partial x}{\partial k_i} = 0 \\[2em]
\displaystyle\sum_{j=1}^{6} \dot{k}_j \frac{\partial y}{\partial k_i} = 0 \\[2em]
\displaystyle\sum_{j=1}^{6} \dot{k}_j \frac{\partial z}{\partial k_i} = 0
\end{array}\right\| \quad
\begin{array}{l}
\displaystyle\sum_{j=1}^{6} \dot{k}_j \frac{\partial \dot{x}}{\partial k_i} = X \\[2em]
\displaystyle\sum_{j=1}^{6} \dot{k}_j \frac{\partial \dot{y}}{\partial k_i} = Y \\[2em]
\displaystyle\sum_{j=1}^{6} \dot{k}_j \frac{\partial \dot{z}}{\partial k_i} = Z
\end{array}
$$

Crochets de Lagrange

$$
-\sum_{j=1}^{6} \dot{k}_j \frac{\partial x}{\partial k_j} \frac{\partial \dot{x}}{\partial k_\ell} = 0 \qquad \Big\| \qquad \sum_{j=1}^{6} \dot{k}_j \frac{\partial \dot{x}}{\partial k_j} \frac{\partial x}{\partial k_\ell} = X \frac{\partial x}{\partial k_\ell}
$$

$$
-\sum_{j=1}^{6} \dot{k}_j \frac{\partial y}{\partial k_j} \frac{\partial \dot{y}}{\partial k_\ell} = 0 \qquad \Big\| \qquad \sum_{j=1}^{6} \dot{k}_j \frac{\partial \dot{x}}{\partial k_j} \frac{\partial x}{\partial k_\ell} = Y \frac{\partial x}{\partial k_\ell}
$$

$$
-\sum_{j=1}^{6} \dot{k}_j \frac{\partial z}{\partial k_j} \frac{\partial \dot{z}}{\partial k_\ell} = 0 \qquad \Big\| \qquad \sum_{j=1}^{6} \dot{k}_j \frac{\partial \dot{x}}{\partial k_j} \frac{\partial x}{\partial k_\ell} = Z \frac{\partial x}{\partial k_\ell}
$$

Crochets de Lagrange

en faisant la somme de toutes ces équations on obtient

$$\sum_{j=1}^{6} \dot{k}_j \left(k_\ell, k_j\right) = X \frac{\partial x}{\partial k_\ell} + Y \frac{\partial y}{\partial k_\ell} + Z \frac{\partial z}{\partial k_\ell}$$

Crochet de Lagrange : $\boxed{\left(k_\ell, k_j\right) = \frac{\partial x}{\partial k_\ell}\frac{\partial \dot{x}}{\partial k_j} - \frac{\partial \dot{x}}{\partial k_\ell}\frac{\partial x}{\partial k_j} + (\text{id. } y, z)}$

Hypothèse : la force pertubatrice dérive d'un potentiel

$$\exists R\left(x, y, z\right) \text{ tel que } \left\{X = \frac{\partial R}{\partial x}, Y = \frac{\partial R}{\partial y}, Z = \frac{\partial R}{\partial z}\right\}$$

les équations donnant k_i sont donc

$$1 \leq j \leq 6 \sum_{i=1}^{6} \dot{k}_j \left(k_\ell, k_j\right) = \frac{\partial R}{\partial k_j} \quad \Longrightarrow \quad A\dot{\vec{k}} = \overrightarrow{\mathrm{grad}_{\vec{k}}\left(R\right)}$$

Équations planétaires

$$
\left\{
\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= -\left(\frac{2}{n^2a}\right)\frac{\partial R}{\partial \tau}\\
\frac{de}{dt} &= -\left(\frac{1-e^2}{n^2a^2e}\right)\frac{\partial R}{\partial \tau} - \left(\frac{\sqrt{1-e^2}}{n^2ae}\right)\frac{\partial R}{\partial \omega}\\
\frac{d\tau}{dt} &= \left(\frac{2}{n^2a}\right)\frac{\partial R}{\partial a} + \left(\frac{1-e^2}{n^2a^2e}\right)\frac{\partial R}{\partial e}\\
\frac{d\Omega}{dt} &= \left(\frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\right)\frac{\partial R}{\partial i}\\
\frac{d\omega}{dt} &= \left(\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\right)\frac{\partial R}{\partial e} - \left(\frac{\cot i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\right)\frac{\partial R}{\partial i}\\
\frac{di}{dt} &= \left(\frac{\cot i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\right)\frac{\partial R}{\partial \omega} - \left(\frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\right)\frac{\partial R}{\partial \Omega}
\end{aligned}
\right.
$$

$$\boldsymbol{A}\,\dot{\vec{k}} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}_{\vec{k}}(R)$$

$$\mathbf{1} = n^2a/2 \qquad \mathbf{2} = \mathbf{3} \times \cos i$$

$$\mathbf{3} = -\sqrt{1-e^2}\; n\,a/2 \qquad \mathbf{4} = \mathbf{5} \times \cos i$$

$$\mathbf{5} = na^2e/\sqrt{1-e^2}$$

$$\mathbf{6} = na^2 \sin i\sqrt{1-e^2}$$

$$
\boldsymbol{A} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}
\hline
 & & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \\ \hline
 & & & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \\ \hline
\boxed{1} & & & & & \\ \hline
\boxed{2} & \boxed{4} & & & & \mathbf{6} \\ \hline
\boxed{3} & \boxed{5} & & & & \\ \hline
 & & & \boxed{6} & & \\ \hline
\end{array}
\qquad
\vec{k} = \begin{array}{|c|}
\hline
a \\ \hline
e \\ \hline
\tau \\ \hline
\Omega \\ \hline
\omega \\ \hline
i \\ \hline
\end{array}
$$

$$\det(\boldsymbol{A}) = \mathbf{1}^2\,\mathbf{5}^2\,\mathbf{6}^2 = n^8a^{10}\sin^2 i\, e^2$$

$$
\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}
\hline
 & & \blacksquare & & & \\ \hline
 & & \blacksquare & & \blacksquare & \\ \hline
\square & \square & & & & \blacksquare \\ \hline
 & & & & & \blacksquare \\ \hline
 & \square & & & & \blacksquare \\ \hline
 & & \square & \square & \square & \\ \hline
\end{array}
$$

nul !

Généralisation (Lagrange aussi !)

Problème de mécanique possédant ℓ degrés de liberté $\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\dfrac{1}{m}\nabla_{\vec{r}}\,U$, on pose $\vec{r} = \vec{r}\,(\vec{q}\,(t))$ avec $\vec{q} \in \mathbb{R}^\ell$

Généralisation (Lagrange aussi !)

Problème de mécanique possédant ℓ degrés de liberté $\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\dfrac{1}{m}\nabla_{\vec{r}}\, U$, on pose

$\vec{r} = \vec{r}\,(\vec{q}\,(t))$ avec $\vec{q} \in \mathbb{R}^\ell$

- Formalisme du second ordre

$$\forall i = 1, \cdots, \ell \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \text{ avec } \mathcal{L} = \frac{1}{2} m \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2 - U$$

Généralisation (Lagrange aussi !)

Problème de mécanique possédant ℓ degrés de liberté $\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\dfrac{1}{m}\nabla_{\vec{r}}\, U$, on pose

$\vec{r} = \vec{r}(\vec{q}(t))$ avec $\vec{q} \in \mathbb{R}^\ell$

Formalisme du second ordre

$$\forall i = 1, \cdots, \ell \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \text{ avec } \mathcal{L} = \frac{1}{2} m \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2 - U$$

Formalisme du premier ordre

On introduit $p_{i=1,\cdots,\ell} := \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$ et $\vec{k} = [\vec{q}, \vec{p}]^\top \in \mathbb{R}^{2\ell}$ et l'on obtient

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = J\ \nabla_{\vec{k}}\, \mathcal{H} \qquad \text{avec} \left\{ \begin{array}{l} J = \begin{bmatrix} 0 & I_\ell \\ -I_\ell & 0 \end{bmatrix} = -J^\top \\ \mathcal{H} = \mathcal{H}(\vec{q}, \vec{p}) = \vec{p}.\dot{\vec{q}} - \mathcal{L} \end{array} \right.$$

Généralisation (Lagrange aussi !)

Problème de mécanique possédant ℓ degrés de liberté $\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\dfrac{1}{m}\nabla_{\vec{r}}\, U$, on pose $\vec{r} = \vec{r}\,(\vec{q}\,(t))$ avec $\vec{q} \in \mathbb{R}^\ell$

Formalisme du second ordre

$$\forall i = 1, \cdots, \ell \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \text{ avec } \mathcal{L} = \frac{1}{2} m \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2 - U$$

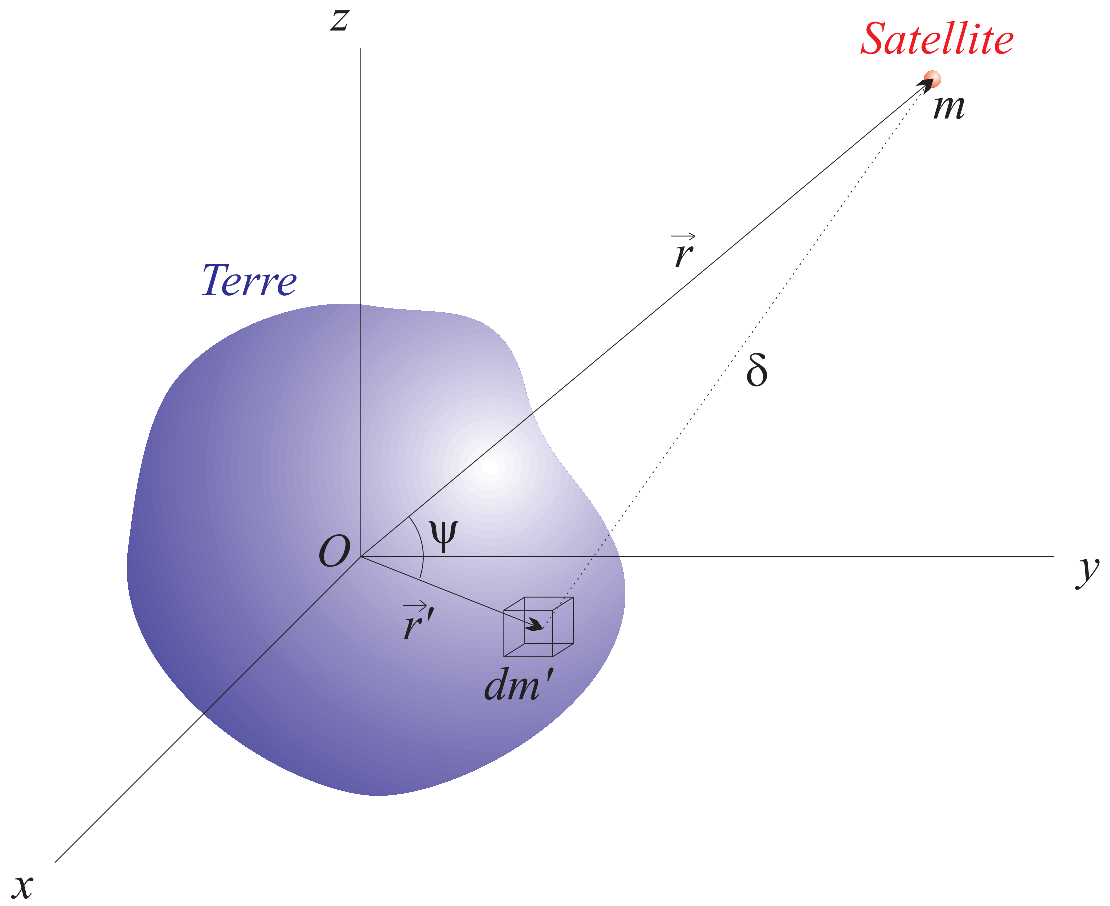
Formalisme du premier ordre

On introduit $p_{i=1,\cdots,\ell} := \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$ et $\vec{k} = [\vec{q}, \vec{p}]^\top \in \mathbb{R}^{2\ell}$ et l'on obtient

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = J\ \nabla_{\vec{k}}\, \mathcal{H} \qquad \text{avec} \left\{ \begin{array}{l} J = \begin{bmatrix} 0 & I_\ell \\ -I_\ell & 0 \end{bmatrix} = -J^\top \\ \mathcal{H} = \mathcal{H}\,(\vec{q}, \vec{p}) = \vec{p}.\dot{\vec{q}} - \mathcal{L} \end{array} \right.$$

Dynamique $\rightarrow$ analytique, géométrique, algébrique, canonique, symplectique, ...

Orbite d'un satellite



Terre

Non sphérique

Non concentrique

Force exercée sur m

$$\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}\,(U)}$$

$$U(\mathbf{r}) = -G \int_{\mathbf{r}' \in V} \frac{m dm'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Le véritable potentiel gravitationnel terrestre

$U(\mathbf{r}) = -G\int_{\mathbf{r}'\in V} \frac{m\,dm'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ Legendre montre que $\frac{1}{\delta} = \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos\psi)$

le potentiel terrestre devient donc

$$U(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(\mathbf{r}), \quad U_n(\mathbf{r}) = -\frac{Gm}{r}\left\{\frac{1}{r^n}\int_{r'\in V} r'^n P_n(\cos\psi)\,dm'\right\}$$

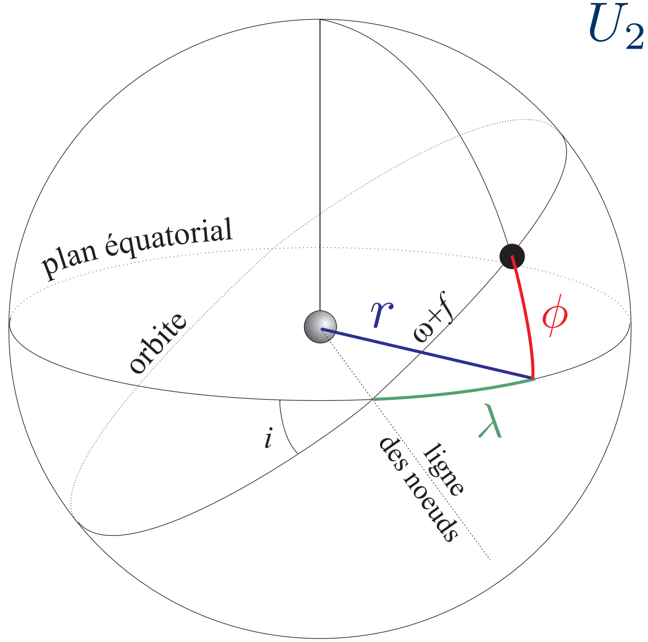
Terme keplerien : $n = 0$

$$U_0(\mathbf{r}) = -\frac{Gm}{r}\int_{r'\in V} dm' = -\frac{Gm m_\oplus}{r}$$

Terme barycentrique : $n = 1$

$U_1(\mathbf{r}) = 0$ dans le référentiel géocentrique (gal ?)

Terme inertiel : $n = 2$



$$U_2(\mathbf{r}) = -\frac{Gm}{r^3}\left\{-\frac{1}{2}\int_V \sum_{\mu=1}^{3} x'^2_\mu + \frac{3}{2r^2}\sum_{\mu,\nu=1}^{3} x_\mu x_\nu \int_V x'_\mu x'_\nu dm'\right\}$$

...Symétrie de révolution...

$$U_2(r,\phi) = \frac{Gmm_\oplus}{r}\left(\frac{r_e}{r}\right)^2 J_2 P_2(\sin\phi)$$

avec $J_2 = \dfrac{C-A}{m_\oplus r_e^2}$

Tout le monde peut voir que $\sin\phi = \sin i \sin(\omega + f)$ ...

Le retour de Lagrange...

Force de gravitation exercée par la Terre sur le satellite :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F} &= -\mathrm{grad}_{\mathbf{r}} U(r,\phi) \\ &= -Gmm_{\oplus}\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} + \mathrm{grad}_{\mathbf{r}}\left[-\frac{Gmm_{\oplus}}{r}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{r_e}{r}\right)^n J_n P_n(\sin\phi)\right]\end{aligned}$$

PFD

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -Gm_{\oplus}\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} + \mathrm{grad}_{\mathbf{r}}(R)$$

fonction perturbatrice

$$R = R(r,\phi) = -\frac{Gm_{\oplus}}{r}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{r_e}{r}\right)^n J_n P_n(\sin\phi)$$

Une simple intégration ...

$$R = \frac{GJ_2 m_\oplus r_e^2}{2}\left(\frac{1}{r}\right)^3\left(1 - 3\sin^2 i \sin^2(\omega + f)\right) + \mathcal{O}\left(\left(\frac{r_e}{r}\right)^4\right)$$

Partie séculaire $\overline{R}$ - périodique $\widetilde{R}$

$$\widetilde{R} = R - \overline{R} \qquad \text{avec} \qquad \overline{R} = \frac{2\pi}{T}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} R\,dt = \frac{n}{2\pi}\int_0^{2\pi} R\,dt$$

Loi des aires :

$$dt = \frac{r^2}{C}df = \frac{r^2}{\sqrt{p\mu}}df = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\frac{r^2}{\sqrt{a\left(1-e^2\right)}}df$$

ainsi $\left(n = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}\right)$

$$\overline{R} = \frac{nGJ_2 m_\oplus r_e^2}{2\sqrt{\mu}}\frac{1}{\sqrt{a\left(1-e^2\right)}}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\left(1 - 3\sin^2 i \sin^2(\omega + f)\right)}{r}df$$

Trajectoire elliptique

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + e\cos(f)}{p} = \frac{1 + e\cos(f)}{a(1-e^2)}$$

finalement

$$\overline{R} = \frac{nGJ_2 m_\oplus r_e^2}{4\pi\sqrt{\mu}\left[a(1-e^2)\right]^{3/2}} \int_0^{2\pi} \left[1 + e\cos(f)\right]\left[1 - 3\sin^2 i \sin^2(\omega + f)\right] df$$

... intégration ...

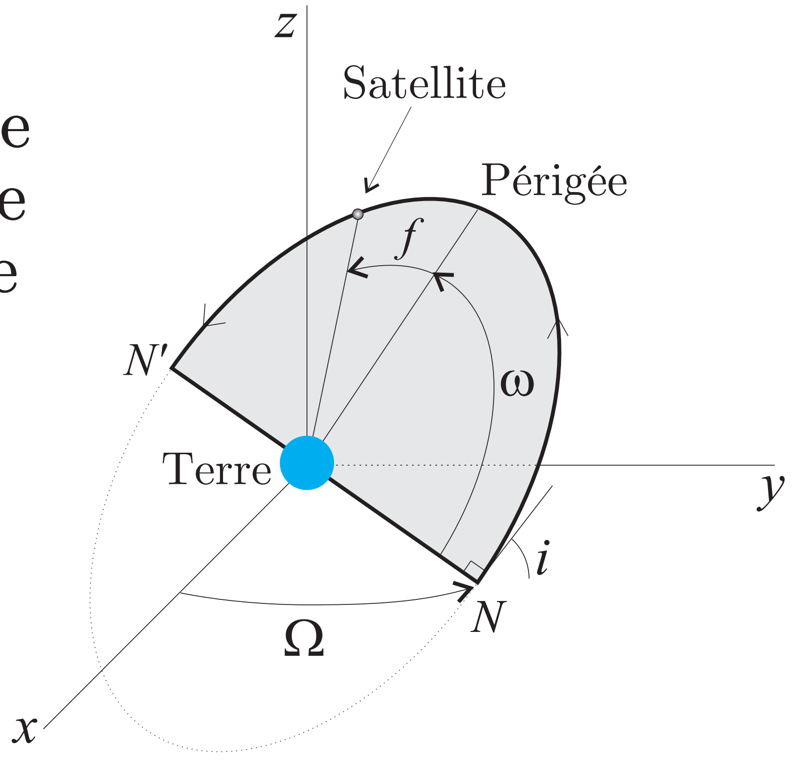
$$\overline{R} = \overline{R}(a, e, i) = \gamma \frac{\left(3\cos^2 i - 1\right)}{\left[a(1-e^2)\right]^{3/2}} \quad \text{avec} \quad \gamma = n\frac{Gm_\oplus}{\sqrt{\mu}}\frac{J_2}{4}r_e^2$$

Mouvement du satellite

$$
\left[
\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= -\left(\frac{2}{n^2 a}\right)\cancel{\frac{\partial R}{\partial \tau}} \\
\frac{de}{dt} &= -\left(\frac{1-e^2}{n^2 a^2 e}\right)\cancel{\frac{\partial R}{\partial \tau}} - \left(\frac{\sqrt{1-e^2}}{n^2 a e}\right)\cancel{\frac{\partial R}{\partial \omega}} \\
\frac{d\tau}{dt} &= \left(\frac{2}{n^2 a}\right)\frac{\partial R}{\partial a} + \left(\frac{1-e^2}{n^2 a^2 e}\right)\frac{\partial R}{\partial e} \\
\frac{d\Omega}{dt} &= \left(\frac{1}{n a^2 \sqrt{1-e^2}\sin i}\right)\frac{\partial R}{\partial i} \\
\frac{d\omega}{dt} &= \left(\frac{\sqrt{1-e^2}}{n a^2 e}\right)\frac{\partial R}{\partial e} - \left(\frac{\cot i}{n a^2 \sqrt{1-e^2}}\right)\frac{\partial R}{\partial i} \\
\frac{di}{dt} &= \left(\frac{\cot i}{n a^2 \sqrt{1-e^2}}\right)\cancel{\frac{\partial R}{\partial \omega}} - \left(\frac{1}{n a^2 \sqrt{1-e^2}\sin i}\right)\cancel{\frac{\partial R}{\partial \Omega}}
\end{aligned}
\right.
$$

$$\boxed{R = R(a, e, i)}$$

$$
\begin{aligned}
a &= \text{cste} \\
e &= \text{cste} \\
i &= \text{cste}
\end{aligned}
$$



Géodésie spatiale moderne

- Météorologie : utilisation des données GPS

Géodésie spatiale moderne

- Météorologie : utilisation des données GPS

- Océanographie

Géodésie spatiale moderne

- Météorologie : utilisation des données GPS

- Océanographie

- Prise en compte de paramètres fins : activité solaire, albédo terrestre, pression de radiation (passage dans le cone d'ombre), ...

Géodésie spatiale moderne

- Météorologie : utilisation des données GPS

- Océanographie

- Prise en compte de paramètres fins : activité solaire, albédo terrestre, pression de radiation (passage dans le cone d'ombre), ...

- Prise en compte des résonances : l'exemple de Galileo et la résonance $5:3$

Géodésie spatiale moderne

- Météorologie : utilisation des données GPS
- Océanographie
- Prise en compte de paramètres fins : activité solaire, albédo terrestre, pression de radiation (passage dans le cone d'ombre), ...
- Prise en compte des résonances : l'exemple de Galileo et la résonance $5:3$
- Autres types d'éléments, ondelettes, ...